Краткие сообщения ОИЯИ №8-85 JINR Rapid Communications No.8-85
УДК 633.9+534.2

РЕЗОНАНСНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ СОЛИТОНОВ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ В ЗАМАГНИЧЕННОМ ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

С.Т.Иванов*, В.Г.Маханьков

Рассмотрена генерация солитонов в замагниченном плазменном волноводе слабым электронным пучком. Показано, что существует область параметров пучка и плазмы, в которой линейно неустойчивая волна распадается на цуг солитонов строго определенной амплитуды и скорости (последние подчиняются уравнению КдФ). Такой распад, "выбивая" волну из резонанса с пучком, может приводить к срыву линейной неустойчивости гидродинамического типа.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Resonance Generation of Solitons by Electron Beam in a Magnetized Plasma Waveguide

S.T.Ivanov, V.G.Makhankov

Soliton generation by a weak electron beam in a magnetized plasma waveguide is considered. The region of beam and plasma parameters is shown to exist in which a linearly unstable wave decays into a set of solitons of sharply definite amplitudes and velocities (governed by the KdV equation). Such a decay destroys a wave-beam resonance and can give rise to ceasing the linear hydrodynamic type instability.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Введение

В связи с генерацией и усилением мощных СВЧ электромагнитных волн в последние годы интенсивно исследуется их возбуждение сильноточными электронными пучками в плазменных волноводах (см. /1/ и цитированную там литературу). Если скорость пучка слегка превышает фазовую скорость собственной волны, в системе развивается пучковая неустойчивость, нарастающая на линейной стадии экспоненциально.

---

* Софийский университет, НРБ.

На конечной стадии могут развиваться различные нелинейные процессы, связанные с захватом частиц, возбуждением высших гармоник, распадом волн и т.д. В настоящей работе мы указываем на еще одну возможность нелинейного взаимодействия пучка с плазмой — распад возбужденной пучком гармонической волны на солитоны.

Как было показано аналитически и подтверждено экспериментально /2/, при малой нелинейности в плазменном волноводе (без пучка) могут распространяться солитоны. Например, в результате распада отрицательных прямоугольных импульсов появились солитоны, описываемые уравнением Кортевега-де Фриза /КдФ). Поскольку воздействие электромагнитной волны на электронные компоненты плазмы и пучка в качественном отношении одинаково, можно ожидать, что в плазменном волноводе с компенсированным пучком, являющимся слабым возмущением, тоже могут распространяться солитоны. Конечно, при этом вклад пучка будет определяться степенью близости его скорости к скорости солитона. Можно предположить, что в случае, когда эти скорости значительно отличаются друг от друга, солитоны не будут "замечать" пучок, и их можно описать уравнением КдФ, полученным Икези и др. /2/. Если же они достаточно близки, воздействие поля на пучок будет значительно сильнее, и нелинейные члены уравнения КдФ будут определяться также и пучком. Наконец, когда они очень близки, вкладом плазмы можно пренебречь, и в уравнении КдФ останутся одни пучковые члены.

В настоящей работе определены интервалы, в которых можно пренебречь той или другой электронной компонентой, и получено уравнение КдФ для таких значений скорости пучка, при которых система плазма-пучок неустойчива. Получены солитонные решения при амплитуде поля, ниже необходимой для захвата частиц пучка в потенциальную яму волны. Следовательно, нарастающая в результате развития пучковой неустойчивости гармоническая волна при достижении этого уровня распадается на солитоны, причем процесс носит ярко выраженный резонансный характер.

1. Уравнение КдФ для системы плазма-пучок

Рассмотрим волновод радиуса R, заполненный холодной плазмой с концентрацией n_0^p. Вдоль оси z волновода со скоростью u распространяется электронный пучок того же радиуса с концентрацией n_0^b. Система находится во внешнем магнитном поле B_0, таком, что

$$\Omega \gg \omega_{b,p} \quad (\Omega = eB_0/mc, \quad \omega^2_{b,p} = 4\pi e^2 n_0^{b,p}/m_e).$$

Пусть пучок является слабым возмущением, т.е.

$$\sqrt{\frac{n^b}{n^p}} = \eta \equiv \omega_b/\omega_p \ll 1. \tag{1}$$

Для описания такой системы используем уравнения двухжидкостной гидродинамики и уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial}{\partial t} n^i + \frac{\partial}{\partial z}(n^i V^i) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + V^i \frac{\partial}{\partial z}\right) V^i = \frac{e}{m_e} \frac{\partial}{\partial z} \Phi,$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta_\perp\right)\Phi = 4\pi e\left(\sum_i n^i - n_0\right). \tag{2}$$

Здесь $\Delta_\perp = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$, $i = b, p$, индексы "b" и "p" относятся соответственно к пучку и плазме, n^i и V^i — концентрация и скорость частиц, $n_0 = n_0^b + n_0^p$. Мы рассматриваем аксиально-симметричные возмущения. Это обеспечивается выполнением условий /3/:

$$k_\perp u \simeq \frac{2{,}4}{R} u < \omega_p < \frac{3{,}8}{R} u. \tag{3}$$

Приведем из этой же работы некоторые результаты линейной теории. При выполнении условия (3) в системе будет возбуждаться гармоническая аксиально-симметричная волна с частотой, волновым числом и инкрементом соответственно:

$$\omega_0 = (\omega_p^2 - k_\perp^2 u^2)^{1/2} = \omega_p (1 - u^2/V_p^2)^{1/2}, \quad k_0 = \frac{\omega_0}{u}$$
$$\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\eta^2\right)^{1/3} \omega_0. \tag{4}$$

Здесь $k_\perp = (\mu_{00}/R) \simeq 2{,}4/R$, $J_0(\mu_{00}) = 0$. При этом фазовая скорость V_{ph} неустойчивой волны удовлетворяет условию

$$V_{ph} \lesssim u < V_p \overset{\text{def}}{=} \frac{\omega_p}{k_\perp}, \quad (\text{см.}\,(3)). \tag{5}$$

Как было отмечено, в некоторых интервалах скоростей можно пренебрегать вкладом пучка или плазмы. Для того чтобы определить эти интервалы, будем искать решение системы уравнений в виде бегущей волны $f(z - Vt)$, при этом уравнения непрерывности и движения легко интегрируются, давая следующее уравнение для Φ:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} + \Delta_\perp\right)\Phi = 4\pi e\left(n_0^p\left(1+\frac{2e\Phi}{m_e V^2}\right)^{-1/2} + n_0^b\left(1+\frac{2e\Phi}{m_e u'^2}\right)^{-1/2} - n_0\right). \qquad (6)$$

Здесь $u' = V - u$, $\tilde{z} = z - Vt$.

После разложения по степеням $\frac{2e\Phi}{mu'^2} \ll 1$ с учетом квадратичных членов (6) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} + \Delta_\perp\right)\Phi = -\left(\frac{\omega_p^2}{V^2} + \frac{\omega_b^2}{u'^2}\right)\Phi + \frac{3e}{2m}\left(\frac{\omega_p^2}{V^4} + \frac{\omega_b^2}{u'^4}\right)\Phi^2. \qquad (7)$$

При различных V вклад пучковых членов, пропорциональных ω_b^2/u'^k, по отношению к плазменным может сильно меняться в зависимости от величины "расстройки" $u' = V - u$. Если $u'^2 \gg \eta^2 V^2$, пучковыми членами можно пренебречь, и состояние системы в интервалах

$$V \ll u(1-\eta), \quad V \gg u(1+\eta) \qquad (8)$$

определяется плазмой. Как уже отмечалось, для этого случая в работе [2] выведено уравнение КдФ. Когда "расстройка" u' удовлетворяет условиям $\eta^2 V \ll |u'| \ll \eta V$, в уравнении (7) можно пренебречь вкладом плазмы в нелинейном члене и вкладом пучка в линейном. Тогда состояние системы в интервалах

$$u(1+\eta^2) < V < u(1+\eta), \quad u(1-\eta^2) > V > u(1-\eta) \qquad (9)$$

определяется линейной плазмой и нелинейным пучком. Как мы увидим, это наиболее интересная область.

В случае же, когда $|u'| \ll \eta^2 V$, скорости распространения волны и пучка настолько близки, что воздействие поля на пучок значительно сильнее его воздействия на плазму и последним можно пренебречь. В интервале

$$u(1-\eta^2) < V < u(1+\eta^2) \qquad (10)$$

состояние рассматриваемой системы определяется лишь пучковыми вкладами.

Проведенный анализ мы не связывали с заданными начальными параметрами пучка и плазмы. Оказывается, что реализация рассмотренных интервалов (8)÷(10) связана с начальной расстройкой $u - V_p$. Если $u > V_p$, система устойчива на линейной стадии, и солитоны в этом случае могут возбуждаться лишь внешними источниками. Если же $u < V_p$, гармоническая волна с частотой ω_0 и инкрементом δ (4) будет нарастать, пока в действие не вступит нелинейность. Поэтому мы подробнее остановимся на последнем случае:

$$u < V_p. \qquad (11)$$

Начнем с интервала (8). Приведем здесь полученное для этих условий уравнение КдФ [2] в удобной для нас форме:

$$2\frac{k_\perp^2}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \left(k_\perp^2 - \frac{\omega_p^2}{V^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{z}} - \frac{3e}{2m_e}\frac{\omega_p^2}{V^4}\frac{\partial\Phi^2}{\partial\tilde{z}} + \frac{\partial^3\Phi}{\partial\tilde{z}^3} = 0, \quad (12)$$

из которого следует, что солитоны существуют при $V > V_p$. С учетом этого условия и (11) видно, что их скорость может находиться лишь в верхнем интервале (8). Если скорость пучка такова, что

$$V_p(1 - \eta) < u < V_p, \quad (13)$$

нелинейность системы определяется пучком, а скорость V находится в верхнем интервале (9), $u(1 + \eta^2) < V < u(1 + \eta)$. Если же u задается в интервале (13), но $V_p(1 - \eta) < u < V_p(1 - \eta^2)$, интервал для V несколько изменяется: $V_p < V < u(1 + \eta)$.

Из всех этих рассуждений можно заключить, что, когда нелинейность определяется пучком, его скорость, как и скорость солитонов, порядка $V_p = \omega_p / k_\perp$, т.е. $u \simeq V \simeq V_p$. Из этого обстоятельства и условия $|u'| \gg \eta^2 V$ следует, что

$$V - u \gg \eta^2 V \simeq \omega_b / k_\perp. \quad (14)$$

Добавим еще, что интервал (10), как и нижние интервалы (8) и (9), может быть реализован лишь при $u > V_p$.

Перейдем к выводу уравнения КдФ для волновода с пучком в интервале скоростей (13), т.е. для волновода с "линейной" плазмой и "нелинейным" пучком.

Для этого воспользуемся методом, предложенным в [4]. Рассматривая слабую нелинейность, мы предполагаем, что поперечная зависимость потенциала выражается собственными функциями оператора $\Delta_\perp$: $\Phi = J_0(k_\perp r) f(z)$.

Следуя [4], введем малый параметр ϵ и новые переменные $\xi = \epsilon^{1/2}(z - t)$, $\tau = \epsilon^{3/2} t$.

Обезразмерим систему уравнений заменой $z \to k_\perp z$, $t \to \omega_b t$, $V \to k_\perp V/\omega_b$, $n \to n/n_0^b$ и $\Phi \to e k_\perp^2 \Phi / m_e \omega_b^2$.

После этого в системе пучка уравнения (2) принимают следующий вид:

$$\epsilon\frac{\partial n^i}{\partial\tau} - \frac{\partial n^i}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi} n^i V^i = 0,$$
$$\epsilon\frac{\partial V^i}{\partial\tau} - \frac{\partial V^i}{\partial\xi} + V^i\frac{\partial V^i}{\partial\xi} - \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = 0, \quad \epsilon\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} = \Phi + n^p + n^b - n_0. \quad (15)$$

Используя разложения

$$n^b = 1 + \epsilon n_1^b + \epsilon^2 n_2^b + \dots, \quad n^p = n_0^p + \epsilon n_1^p + \dots,$$

$$V^b = \epsilon V_1^b + \epsilon^2 V_2^b + \dots, \quad V^p = -u + \epsilon V_1^p + \dots, \quad \Phi = \epsilon\Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2 + \dots,$$

из (15) легко получаем уравнения первого и второго порядка по ϵ. Решая их с учетом условий $V^b = 0$, $n^p = n_0^p$ при $\Phi = 0$ по отношению к Φ_1, получаем уравнение КдФ. Записанное для размерных величин в системе, движущейся со скоростью V, оно имеет вид

$$\left(2\frac{k_\perp^2}{V}\frac{\partial}{\partial t} - \left(k_\perp^2 - \frac{\omega_p^2}{V^2}\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial^3}{\partial \tilde{z}^3}\right) f(\tilde{z}) - \frac{3e\beta}{2m_e}\frac{\omega_b^2}{u'^4}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} f^2(\tilde{z}) = 0. \quad (16)$$

Здесь потенциал представлен в виде $\Phi_1 = J_0(k_\perp r) f(\xi)$, а $\beta = \int_0^R J_0^3(k\, r) r dr \,/ \int_0^R J_0^2(k\, r) r dr \simeq 0{,}72$.

При этом учтено условие (14) и, кроме того, в скобках перед $\partial f(\tilde{z})/\partial t$ и $\partial f(\tilde{z})/\partial \tilde{z}$ отброшены пучковые члены, так как в рассматриваемом случае $u'^2 \gg \eta^4 V^2$.

2. Солитонные решения

Найдем стационарное решение уравнения (16), зависящее лишь от $\tilde{z} = z - Vt$. В этом случае (16) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} f(\tilde{z}) = \left(k_\perp^2 - \frac{\omega_p^2}{V^2}\right) f(z) + \frac{3e\beta}{2m_e}\frac{\omega_b^2}{u'^4}\frac{\partial f^2(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}}, \quad (17)$$

солитонные решения которого хорошо известны:

$$f(\tilde{z}) = -f_0 \operatorname{sech}^2(\tilde{z}/\Delta). \quad (18)$$

Значения амплитуды солитона и его ширины определяются следующими выражениями:

$$f_s = \frac{4}{\Delta^2}\frac{m}{e\beta}\frac{(V-u)^4}{\omega_b^2}, \quad \Delta^2 = \frac{4}{k_\perp^2 - \omega_p^2/V^2}. \quad (19)$$

В интервале $u \ll V_p(1-\eta)$, в котором рассматриваемая система описывается уравнением КдФ (12), солитоны имеют тот же вид (18), их ширина совпадает с шириной, определяемой соотношением (19), амплитуда, однако, несколько иная:

$$f_s = \frac{4}{\Delta^2}\frac{m_e}{e\beta}\frac{V^4}{\omega_p^2}.$$

Как видно из (18), амплитуда солитона отрицательна, так что на солитоны может распадаться лишь отрицательная полуволна. Этот факт согласуется с результатами, полученными в /2/. Отметим еще раз, что там наблюдались солитоны лишь при подаче на плазму отрицательных импульсов.

Подчеркнем, что уравнение (16), а значит, и решение (18), справедливо при выполнении условия $k_\perp^2 > \omega_p^2/V^2$, поэтому в неограниченной плазме ($R \to \infty$ и, следовательно, $k_\perp \to 0$) в рамках рассматриваемой модели солитонов нет.

Заметим, что нарастающая волна, движущаяся со скоростью $V_{ph} \simeq u$, будет распадаться на солитоны, если скорости последних V больше V_p, а значит, амплитуды подчиняются условию:

$$f_s \gtrsim 6\,\frac{k_\perp^2}{V_p}\,(V - u). \tag{20}$$

При выводе уравнения КдФ мы использовали редуктивный метод теории возмущений [4] и ограничились лишь уравнениями второго порядка по ϵ, что эквивалентно условию

$$\frac{2e\Phi}{m_e u'^2} \ll 1. \tag{21}$$

Условия (20) и (21) дают

$$\frac{1}{12}\,\frac{m_e u' V}{e k_\perp^2} \gg 1. \tag{22}$$

Подставляя амплитуду солитона (19) в формулу (20), найдем

$$\frac{m_e u' V}{e k_\perp^2}\left(\frac{u'}{V\eta^2}\right)^2 \frac{u'}{V} > 3,$$

что с учетом (14) и (22) может легко выполняться.

С другой стороны, процесс, определяющий уровень насыщения неустойчивости, — захват электронов пучка потенциальной ямой волны — наступает при условии $2e\Phi/m_e u' \simeq 1$. Окончательная фаза зависит от соотношения времени линейного роста и солитонного распада волны. Если время распада больше обратного линейного инкремента, то амплитуда волны в установившемся состоянии будет определяться процессом захвата. В обратном случае — распадом.

Скорость распада волны можно грубо оценить по скорости образования особенности у функции V_x в простой волне Римана для уравнения $V_t + VV_x = 0$. Эта скорость — порядка обратного времени опрокидывания звуковой волны $V_a = V_0 \sin k_0 x$ и есть $\delta_a \simeq k_0 V_0$. Из уравнения (16) получим

$$\delta_a \simeq k_0 V \frac{3e\beta\omega_b^2}{m_e k_\perp^2 (u')^4} f_0. \tag{23}$$

При условии $\delta_a < \delta$ или

$$\frac{e\Phi_0}{m_e u'^2}\,\frac{u^2}{u'^2}\,\eta^{8/3} > \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{24}$$

будет превалировать распад. Условие (24) может легко выполняться в рассматриваемом интервале скоростной расстройки $\eta^2 u \ll u' \ll \eta u$.

Заметим в заключение, что скорость солитонов (а значит, и их амплитуда) лежит в узкой (резонансной) области значений (см. (14)).

Литература

1. Рухадзе А.А. и др. Физика сильноточных релятивистских элректронных пучков. Атомиздат, М., 1980.
2. Ikezi H. et al. Phys. of Fluids, 1971, 14, p.1997.
3. Ivanov S., Dolgenko O., Rukhadze A. J.Phys., 1975, 8A, p.585.
4. Taniuti T., Wei Ch. J.Phys.Soc.Jap., 1968, 24, p.941.

Рукопись поступила 27 марта 1985 года.